MATEMÁTICA 2 / 2010

LIMITES: Determine el límite (si existe) de las siguientes funciones.

1. $\lim_{x\to -1} 2x^3 - x + 1 = 2(-1)^3 - (-1) + 1 = 0$

2. $\lim_{x\to 3} \dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} = \dfrac{(x-3)(2x+1)}{x-3} = 2x + 1 = 2(3) + 1 = 7$

3. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} = \dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = x^2 + 2x + 4 = \ldots = 12$

4. $\lim_{x\to -1/3} \dfrac{27x^3 + 27x^2 + 9x + 2}{9x^2 + 6x + 1} = \dfrac{(3x+1)^3}{(x+1)^2} = 3x + 1 = 3(-1/3) + 1 = 0$

5. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^4 - 2x^2 + 2}{1 + x - 3x^4} = \dfrac{x^4/x^4 - 2x^2/x^4 + 2/x^4}{1/x^4 + x/x^4 - 3x^4/x^4} = \dfrac{1 - 0 + 0}{0 + 0 - 3} = -1/3$

6. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{5x^5 + 4x^3 - 1}{8x^4 - x^3 + 2} = \dfrac{5x^5/x^5 + 4x^3/x^5 - 1/x^5}{8x^4/x^5 - x^3/x^5 + 2/x^5} = \dfrac{5 + 0 - 0}{0 - 0 + 0} =$ No existe

7. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{3x^2 - 4x + 6}{2x^6 - x - 1} = \dfrac{3x^2/x^6 - 4x/x^6 + 6/x^6}{2x^6/x^6 - x/x^6 - 1/x^6} = \dfrac{0 - 0 + 0}{2 - 0 - 0} = 0$

En los límites que tienden al infinito, cuando la variable con el mayor exponente se encuentra en:

a) Tanto en el Numerador, como en el denominador, la solución será el cociente de los respectivos coeficientes de la variable con el mayor exponente.
b) En el denominador: La solución es igual a cero.
c) En el numerador: No existe límite.

APLICACIONES DE LA DERIVADA

RECTAS NORMALES Y TANGENTES:

Encuentre las ecuaciones de las rectas tangentes y normales en la abscisa correspondiente a cada función indicada.

1. $f(x) = 3x^2 + x - 2$ — **en x= -1**
- $f'(x) = 6x + 1$
- $f'(-1) = 6(-1) + 1$
- $f'(-1) = -5 = m =$ pendiente
- $Y = 3(-1)^2 + (-1) - 2$
- $Y = 0$

Recta Tangente: $-5 = \dfrac{Y - 0}{X - (-1)}$; $Y = -5x - 5$

Recta Normal: $\dfrac{-1}{-5} = \dfrac{Y - 0}{X - (-1)}$; $Y = 1/5\, X + 1/5$

2. $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ — **en x= 2**
- $f'(x) = -3x^2 + 4x - 3$
- $f'(2) = -3(2)^2 + 4(2) - 3$
- $f'(2) = -7 = m =$ pendiente
- $Y = -(2)^3 + 2(2)^2 - 3(2) + 1$
- $Y = -5$

Recta Tangente: $-7 = \dfrac{Y - (-5)}{X - 2}$; $Y = -7X - 9$

Recta Normal: $\dfrac{-1}{-7} = \dfrac{Y - (-5)}{X - 2}$; $Y = {}^{1}/_{7}X - {}^{37}/_{7}$

3. $f(x) = 3x^3 - 4x^2 - x - 4$ — **en x= 0**
- $f'(x) = 9x^2 - 8x - 1$
- $f'(0) = 9(0)^2 - 8(0) - 1$
- $f'(0) = -1 = m =$ pendiente
- $Y = 3(0)^3 + 4(0)^2 - 0 - 4$
- $Y = -4$

Recta Tangente: $-1 = \dfrac{Y - (-4)}{X - 0}$; $Y = -x - 4$

Recta Normal: $\dfrac{-1}{-1} = \dfrac{Y - (-4)}{X - 0}$; $Y = X - 4$

4. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 5$ — **en x= 3**
- $f'(x) = 6x^2 + 6x - 4$
- $f'(3) = 6(3)^2 + 6(3) - 4$
- $f'(3) = 68 = m =$ pendiente
- $Y = 2(3)^3 + 3(3)^2 - 4(3) - 5$
- $Y = 64$

Recta Tangente: $68 = \dfrac{Y - 64}{X - 3}$; $Y = 68x - 140$

Recta Normal: $\dfrac{-1}{68} = \dfrac{Y - 64}{X - 3}$; $Y = 1/68\, X + 4355/68$

5. $f(x) = x^2 - 1$ — **en x= 0**
- $f'(x) = 2x$
- $f'(0) = 2(0)$
- $f'(0) = 0 = m =$ pendiente
- $Y = (0)^2 - 1$
- $Y = -1$

Recta Tangente: $0 = \dfrac{Y - (-1)}{X - 0}$; $Y = -1$

Recta Normal: $\dfrac{-1}{0} = \dfrac{Y - (-1)}{X - 0}$; $X = 0$

APLICACIÓN DE PRIMERA Y SEGUNDA DERIVADA

Determine los intervalos en que crecen y decrecen las funciones, además los puntos máximos y mínimos (por criterios de primera y segunda derivada). Adicional a ello, determine los puntos de inflexión y concavidad en las funciones en que sea posible.

1. $f(x) = x^2 - 6x + 7$

Método 1ª derivada
$f'(x) = 2x - 6 = 0$
$x = 3$ (punto crítico)

INTERVALO O PUNTO	ELEMENTO A VALUAR	1a DERIVADA	CONCLUSIÓN
$-\infty \to 3$	2	-2	Decreciente
3	(3, -2)	- +	P. Mínimo
$3 \to \infty$	4	+2	Creciente

Método 2ª Derivada
$f''(x) = 2$ ⟹ Al ser "+" indica que en el punto crítico (3,-2) hay un punto mínimo.

2. $f(x) = x^3 - 75x + 1$

Método 1ª derivada
$f'(x) = 3x^2 - 75 = 0$
$X_1 = 5$ (punto crítico)
$X_2 = -5$ (punto crítico)

INTERVALO O PUNTO	ELEMENTO A VALUAR	1a DERIVADA	CONCLUSIÓN
$-\infty \to -5$	-6	+33	Creciente
-5	(-5, 251)	+ -	P. Máximo
$-5 \to 5$	0	-75	Decreciente
5	(5, -249)	- +	P. Mínimo
$5 \to \infty$	6	+33	Creciente

Método 2ª Derivada
$f''(x) = 6x$
$f''(5) = 6(5) = 30$ ⟹ Al ser "+" indica que en el punto crítico (5,-249) hay un punto mínimo.
$f''(-5) = 6(-5) = -30$ ⟹ Al ser "–" indica que en el punto crítico (5,251) hay un punto máximo.

PUNTOS DE INFLEXIÓN
$f''(x) = 6x$
$0 = 6x$
$x = 0$
$f(0) = (0)^3 - 75(0) + 1 = 1$
P. de inflexión (0, 1)

CONCAVIDAD

INTERVALO	ELEMENTO A VALUAR	SEGUNDA DERIVADA	CONCLUSIÓN
$(-\infty, 0)$	-1	-	Concavo hacia ▼
$(0, \infty)$	1	+	Concavo hacia ▲

Material de apoyo para el EXAMEN FINAL del curso:

MATEMÁTICA 2 / 2010

3. $f(x) = 9 + 6x - x^2$

Método 1ª derivada

$f'(x) = 6 - 2x = 0$

$x = 3$ (punto crítico)

INTERVALO O PUNTO	ELEMENTO A VALUAR	1a DERIVADA	CONCLUSIÓN
$-\infty \rightarrow 3$	2	+2	Creciente
3	(3,18)	+ -	P. Máximo
$3 \rightarrow \infty$	4	-2	Decreciente

Método 2ª Derivada

$f''(x) = -2$ ==> Al ser "–" indica que en el punto crítico (3,18) hay un punto máximo.

4. $f(x) = x^3 - 18x^2 + 60x$

Método 1ª derivada

$f'(x) = 3x^2 - 36x + 60 = 0$

$X_1 = 10$ (punto crítico)

$X_2 = 2$ (punto crítico)

INTERVALO O PUNTO	ELEMENTO A VALUAR	1a DERIVADA	CONCLUSIÓN
$-\infty \rightarrow 2$	1	+27	Creciente
2	(2, 56)	+ -	P. Máximo
$2 \rightarrow 10$	5	-45	Decreciente
10	(10, -200)	- +	P. Mínimo
$10 \rightarrow \infty$	11	+27	Creciente

Método 2ª Derivada

$f''(x) = 6x - 36$

$f''(10) = 6(10) - 36 = 24$ ==> Al ser "+" indica que en el punto crítico (10,-200) hay un punto mínimo.

$f''(2) = 6(10) - 36 = -24$ ==> Al ser "–" indica que en el punto crítico (2,56) hay un punto máximo.

PUNTOS DE INFLEXIÓN

$f''(x) = 6x - 36$

$0 = 6x - 36$

$x = 6$

$f(6) = (6)^3 - 18(6)^2 + 60x = 1$

P. de inflexión (6, -72)

CONCAVIDAD

INTERVALO	ELEMENTO A VALUAR	SEGUNDA DERIVADA	CONCLUSIÓN
$(-\infty, 6)$	0	-	Concavo hacia ▼
$(6, \infty)$	7	+	Concavo hacia ▲

5. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$

Método 1ª derivada

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0$

$X_1 = 0$ (punto crítico)

$X_2 = 2$ (punto crítico)

$X_3 = -1$ (punto crítico)

INTERVALO O PUNTO	ELEMENTO A VALUAR	1a DERIVADA	CONCLUSIÓN
$-\infty \rightarrow -1$	-2	-96	Decreciente
-1	(-1, -5)	- +	P. Mínimo
$-1 \rightarrow 0$	-0.5	7.5	Creciente
0	(0, 0)	+ -	P. Máximo
$0 \rightarrow 2$	1	-24	Decreciente
2	(2,-32	- +	P. Mínimo
$2 \rightarrow \infty$	5	1080	Creciente

Método 2ª Derivada

$f''(x) = 36x^2 - 24x - 24$

$f''(0) = 36(0)^2 - 24(0) - 24 = -24$ ==> Al ser "-" indica que en el punto crítico (0,0) hay un punto máximo.

$f''(2) = 36(2)^2 - 24(2) - 24 = 72$ ==> Al ser "+" indica que en el punto crítico (2,-32) hay un punto mínimo.

$f''(-1) = 36(-1)^2 - 24(-1) - 24 = 72$ ==> Al ser "+" indica que en el punto crítico (-1,-5) hay un punto mínimo.

PUNTOS DE INFLEXIÓN

$f''(x) = 36x^2 - 24x - 24$

$0 = 36x^2 - 24x - 24$

$X_1 = 1.2$ & $X_2 = -0.6$

$f(1.22) = 3(1.2)^4 - 4(1.2)^3 - 12(1.2)^2 = 1$

P. de inflexión (1.2, -18)

$f(-0.6) = 3(0.6)^4 - 4(0.6)^3 - 12(0.6)^2 = 1$

P. de inflexión (-0.6, -3.1)

CONCAVIDAD

INTERVALO	ELEMENTO A VALUAR	SEGUNDA DERIVADA	CONCLUSIÓN
$(-\infty, -0.6)$	1	+	Concavo hacia ▲
$(-0.6, 1.2)$	0	-	Concavo hacia ▼
$(1.2, \infty)$	2	+	Concavo hacia ▲

FÓRMULAS

Recta = $y = mx + b$

Pendiente = $m = \dfrac{Y - Y_1}{X - X_1}$

FUNCIÓN		DERIVADAS
1. Constante	$= F(x) = k$	$f'(x) = 0$
2. Identidad	$= f(x) = x$	$f'(x) = 1$
3. Constante * identidad	$= f(x) = kx$	$f'(x) = k$
4. Potencia	$= f(x) = x^n$	$f'(x) = n(x)^{n-1}$
5. Potencia * constante	$= k x^n$	$f'(x) = nk(x)^{n-1}$
6. Suma de funciones	$= f(x) + g(x) =$	$f'(x) + g'(x)$
7. Producto de fun.	$= f(x) * g(x) =$	$f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$
8. Cociente de fun.	$= f(x) / g(x) =$	$\dfrac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{[g(x)]^2}$
9. Potencia de una fun.	$= f(x) = [g_{(x)}]^n$	$f'(x) = n[g_{(x)}]^{n-1}[g'_{(x)}]$

CONCAVIDAD